

① المحاضرة الثالثة عشرة

السبقة الأولى
Subject: محاضرة المهندسة

Date: 10 / 5 / 2018



$$y'' + y = \sin x$$

نعمنا لا، لكننا لدينا المعادلة التفاضلية والمطلوب:

- 1- إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة
- 2- إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي
- 3- اقتراح حل دفعة القاعدة الأساسية "دون تعيين المعاملات"
- 4- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

1- الحل للمتجانسة المناظرة:

$$y'' + y = 0$$

المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة المعطاة هي:

$$(D^2 + 1)y = 0$$

كتابة استخدام المؤثر التفاضلي D مع النمو:

$$m^2 + 1 = 0$$

المعادلة المميزة لها هي:

$$m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = i^2 \Rightarrow \pm m = i$$

جذور هذه المعادلة:

$$m_1 = i \wedge m_2 = -i$$

الجذور عقدية غير مكررة، فالحل العام يعطى بالشكل:

$$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

2- الحل الخاص دفعة المؤثر التفاضلي العكسي:

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي:

$$\frac{1}{D^2 + 1}$$

فيكون:

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 1} \sin x$$

نبدل كل D^2 بـ $-m^2$ أي 1-

نكون $\varphi(1) = 0$

$$\frac{1}{D^2 + 1} \sin x = -\frac{x}{2} \cos x$$

لذلك:

~~المعادلة~~ - الاقتراح حل دفعة القاعدة الأساسية:

$$y_p = B_1 \sin x + B_2 \cos x$$

نلاحظ أنه هناك اشتراك بين y_p و y_h لنزل هذا الاشتراك
نضرب الجزء المشترك من y_p بقوة x نزل ذلك الاشتراك:

$$y_p = B_1 x \sin x + B_2 x \cos x$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو:



$$y = y_h + y_p$$

$$= A_1 \cos x + A_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x$$

ملاحظة: لو طلب مني تعيين الأمثلة في الحل الخاص المقترح (دعنا نطلب تحققه)
الحل:

الحل الخاص المقترح المحدد ((أي بعد إزالة الاشتراك بينه وبين y_h أو y_p))

$$y_p = B_1 x \sin x + B_2 x \cos x$$

نسقة صارت بعد إزالة الاشتراك

$$y_p' \text{ و } y_p''$$

$$y_p' = B_1 \sin x + B_1 x \cos x + B_2 \cos x - B_2 x \sin x$$

$$y_p'' = 2B_1 \cos x - 2B_2 \sin x - B_1 x \sin x - B_2 x \cos x$$

$$y'' + y = \sin x \quad \text{نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة}$$

$$2B_1 \cos x - 2B_2 \sin x - B_1 x \sin x - B_2 x \cos x + B_1 x \sin x + B_2 x \cos x = \sin x$$

$$2B_1 \cos x - 2B_2 \sin x = 1 \sin x$$

$$2B_1 = 0$$

$$-2B_2 = 1$$

$$\Rightarrow B_2 = -\frac{1}{2} \text{ and } B_1 = 0$$

$$y_p = -\frac{1}{2} x \cos x$$

وهو ما وجدناه بطريقة التفاضل العكسي

لنحل المعادلة التفاضلية : $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = e^x + \sin x + x \cdot e^{2x}$ والمطلوب :

1- أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة إذا علمت أن $y = e^x$ هو حل خاص.

2- اقترح حلًا خاصًا للمعادلة المعطاة باستخدام طريقة المعاملات غير المحددة دون تعيين تلك المعاملات.

3- أوجد حلًا خاصًا لهذه المعادلة باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي العكسي.

4- اكتب صيغة الحل الخاص للمعادلة المعطاة.

الحل:

1- المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب على الشكل : $(D^5 - D^4 - D + 1)y = 0$
 والمعادلة المميزة لها هي : $m^5 - m^4 - m + 1 = 0$
 $m^4(m-1) - (m-1) = 0$
 $(m-1)(m^4 - 1) = 0$

x عبارة عن أي طرفي الحل e^x :

هنا الحل ناتج عن جزر حقيقي $m=1$
 $m-1 \mid m^5 - m^4 - m + 1$
 $(m-1)$ بالقسمة على ~~المقام~~

$$(m-1)(m^2-1)(m^2+1) = 0$$

الجزور هي :

$$m_1 = 1, m_2 = i, m_3 = -i, m_4 = 1, m_5 = -1$$

$$m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = i \quad m_4 = -i \quad m_5 = -1$$

فالحل الخاص

$$y_h = e^x(A_1 + A_2 x) + A_3 e^{-x} + A_4 \cos x + A_5 \sin x$$

اقترح الحل وفق القاعدة الأساسية :

$$y_p = B_1 e^x + B_2 \sin x + B_3 \cos x + (B_4 + B_5 x) e^{2x}$$

نلاحظ أنه هناك اشتراك بين y_p و y_h

نضرب الجزء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ
فنضرب x^2 بـ x^2 و $\cos x$ بـ x و $\sin x$ بـ x فنضرب هذا الاستاذ
ويصبح المقدار على الشكل :

$$y_p = B_1 x^2 e^x + B_2 x \cos x + B_3 x \sin x + (B_4 x + B_5) e^x$$

لنوجد الحل الخاص وفقاً لطريقة المؤثر المقابل العكسي :

$$y_p = \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} (e^x + x \sin x + x \cdot e^{2x})$$

$$= \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} e^x + \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} x \sin x + \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} x \cdot e^{2x}$$

~~نضرب الجزيء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ~~
1- تأثير المؤثر المقابل على الحالة e^x

$$\frac{1}{(D-1)(D^3-1)(D^2+1)} e^x = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)(D^2+1)} e^x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

$$= \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} e^x = \frac{1}{8} x^2 e^x$$

$$\varphi(1) = 0$$

نلاحظ أن :

$$\varphi(0) = D^2 - 2D + 1 \Rightarrow \varphi'(0) = 2D - 2 \quad \varphi'(1) = 0$$

$$\varphi''(0) = 2 \neq 0$$

نضرب الجزيء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ
بـ D نضرب الجزيء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ
بـ D نضرب الجزيء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

نضرب الجزيء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ

فالة الـ \sin هو الجزء التخيلي لـ (e^{ix})

$$\frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} \sin x = \text{Im} \left[\frac{e^{ix}}{D^5 - D^4 - D + 1} \right]$$

$$\varphi(i) = 0$$

نضرب الجزيء المشترك من y بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاستاذ

$$\varphi' = 5D^4 - 4D^3 - 1 \quad \varphi'(1) = 4 + 4i$$

$$= \text{Im} \left(\frac{x e^{ix}}{4+4i} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{x e^{ix}}{1+i} \right)$$

نضرب بمرافق (1+i) الذي هو 1-i

$$= \text{Im} \left(\frac{x}{4} \frac{(1-i) e^{ix}}{(1+i)(1-i)} \right) = \text{Im} \left[\frac{1}{8} (1-i) (x \cos x + i \sin x) \right]$$

نضرب عددينا عقديين:

$$= \text{Im} \frac{1}{8} [(x \cos x + x \sin x) + i(\sin x - x \cos x)]$$

الحقيقي التخيلي

إذن:

$$\frac{1}{4(1+i)} \sin x = \frac{1}{8} x \sin x - \frac{1}{8} x \cos x$$

الأنواع ثلاث \hat{e}^{2x} ، $\frac{1}{(D^2+1)}$ ، $x e^{2x}$

عندي طريقتان: إما الزمرة الأخيرة

\hat{e}^{2x} والجاء $x \cdot x$ وهي الأسهل:

$$\frac{1}{(D^2+1)(D+1)(D-1)^2} x e^{2x} = x \cdot \frac{1}{(D-1)^2(D+1)(D^2+1)} e^{2x} - \frac{5D^4-4D^3-1}{(D^5-D^4-D+1)^2} e^{2x}$$

$$= x \cdot \frac{e^{2x}}{(2-1)^2(2+1)(4+1)} - \frac{5D^4-4D^3-1}{(32-16-2+1)^2} e^{2x}$$

$$= \frac{x}{15} e^{2x} - \frac{80-24-1}{(32-16-2+1)^2} e^{2x}$$

$$= \frac{x}{15} e^{2x} - \frac{55}{225} e^{2x}$$

فالحل الخاص وضع المؤثر العكسي:

$$y_p = \frac{1}{8} x^2 e^x + \frac{1}{8} x \sin x - \frac{1}{8} x \cos x + \frac{x}{15} e^{2x} - \frac{55}{225} e^{2x}$$

$$y = y_h + y_p = e^x (A_1 + A_2 x) + A_3 e^{-x} + A_4 \cos x + A_5 \sin x$$

$$+ \frac{1}{8} x^2 e^x + \frac{1}{8} x \sin x - \frac{1}{8} x \cos x + \frac{x}{15} e^{2x} - \frac{55}{225} e^{2x}$$